ANALİZ III 1. VE 2. GRUP 1. QUİZ SORU ÇÖZÜMLERİ

1) $\int_0^{4\pi} \frac{\sin x}{\sqrt[3]{x-\pi}}\,dx$ integralinin mutlak yakınsak olduğunu gösteriniz

ÇÖZÜM: $\int_0^{4\pi} \left|\frac{\sin x}{\sqrt[3]{x-\pi}}\right|$ integralinin yakınsak olduğunu göstermeliyiz.

$f(x) = \frac{\sin x}{\sqrt[3]{x-\pi}}$ dersek; f fonksiyonu $\pi \in [0,4\pi]$ noktasında tanımsızdır.

$$\int_0^{4\pi} \left|\frac{\sin x}{\sqrt[3]{x-\pi}}\right| dx = \underbrace{\int_0^{\pi} \left|\frac{\sin x}{\sqrt[3]{x-\pi}}\right| dx}_{I_1} + \underbrace{\int_{\pi}^{4\pi} \left|\frac{\sin x}{\sqrt[3]{x-\pi}}\right| dx}_{I_2}$$

I_1 için

$$\left|\frac{\sin x}{\sqrt[3]{x-\pi}}\right| = \frac{|\sin x|}{-\sqrt[3]{x-\pi}} \le \frac{1}{-\sqrt[3]{x-\pi}}$$

$g(x) = -\frac{1}{\sqrt[3]{x-\pi}}$ dersek; $\forall b \in [0,\pi)$ için g fonksiyonu, $[0,b]$ aralığında sürekli olup integrallenebilirdir

$$\int_0^{\pi} -\frac{1}{\sqrt[3]{x-\pi}}\,dx = -\lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_0^{\pi-\varepsilon} (x-\pi)^{-1/3}\,dx$$

$$= -\lim_{\varepsilon\to 0^+} \left.\frac{(x-\pi)^{2/3}}{\frac{2}{3}}\right|_0^{\pi-\varepsilon}$$

$$= -\frac{3}{2}\cdot\lim_{\varepsilon\to 0^+}\left[(-\varepsilon)^{2/3} - (-\pi)^{2/3}\right]$$

$$= \frac{3}{2}\cdot\pi^{2/3} \quad (\text{sonlu})$$

$\int_0^{\pi} -\frac{1}{\sqrt[3]{x-\pi}}\,dx$ yakınsak olduğundan karşılaştırma testi gereği

I_1 integrali yakınsaktır

I_2 için

$$\left|\frac{\sin x}{\sqrt[3]{x-\pi}}\right| = \frac{|\sin x|}{\sqrt[3]{x-\pi}} \le \frac{1}{\sqrt[3]{x-\pi}}$$

$h(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x-\pi}}$ dersek $\forall a \in (\pi,4\pi]$ için h fonksiyonu, $[a,4\pi]$ aralığında sürekli olup integrallenebilirdir.

Devamı sonraki sayfada

$$\int_{\pi}^{4\pi} \frac{1}{\sqrt[3]{x-\pi}}\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_{\pi+\varepsilon}^{4\pi} (x-\pi)^{-1/3}\,dx$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0^+} \left. \frac{(x-\pi)^{2/3}}{\frac{2}{3}} \right|_{\pi+\varepsilon}^{4\pi}$$

$$= \frac{3}{2} \lim_{\varepsilon\to 0^+} \left[(3\pi)^{2/3} - \varepsilon^{2/3} \right]$$

$$= \frac{3}{2} \cdot (3\pi)^{2/3} \quad (\text{sonlu})$$

$\int_{\pi}^{4\pi} \frac{1}{\sqrt[3]{x-\pi}}\,dx$ yakınsak olduğundan karsılastırma testi geregi I_2 integrali yakınsaktır.

Dolayısıyla $I_1 + I_2 = \int_{0}^{4\pi} \left| \frac{\sin x}{\sqrt[3]{x-\pi}} \right| dx$ integrali yakınsak olup $\int_{0}^{4\pi} \frac{\sin x}{\sqrt[3]{x-\pi}}\,dx$ integrali mutlak yakınsaktır.

2) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{x}{x^2+9+\sqrt{x^2+9}}\,dx$ integralinin değerini hesaplayınız.

ÇÖZÜM: $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{x}{x^2+9+\sqrt{x^2+9}}\,dx = \int_0^{\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2+9}\,(\sqrt{x^2+9}+1)}\,dx = \lim_{R\to\infty}\int_0^{R} \frac{x}{\sqrt{x^2+9}\,(\sqrt{x^2+9}+1)}\,dx$

$$\boxed{\begin{array}{l} \sqrt{x^2+9}+1=u \\ \dfrac{1}{\cancel{2}\sqrt{x^2+9}}\cdot\cancel{2}x\,dx=du \\ \dfrac{x}{\sqrt{x^2+9}}\,dx=du \end{array}}$$

$f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+9}\,(\sqrt{x^2+9}+1)}$ dersek; $\forall R\in[0,\infty$ için f fonksiyonu $[0,R]$ de sürekli olup integrallenebilirdir.

$$\int_0^{\infty} \frac{x}{x^2+9+\sqrt{x^2+9}}\,dx = \lim_{R\to\infty}\int_0^{R} \frac{x}{\sqrt{x^2+9}\,(\sqrt{x^2+9}+1)}\,dx$$

$$= \lim_{R\to\infty}\int_4^{\sqrt{R^2+9}+1} \frac{du}{u}$$

$$= \lim_{R\to\infty} \ln u \Big|_4^{\sqrt{R^2+9}+1}$$

$$= \lim_{R\to\infty}\left[\ln\left(\sqrt{R^2+9}+1\right)-\ln 4\right]$$

$$= \infty$$

3) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{dx}{\sqrt{4x+\ln x}}$ integralinin karakterini belirleyiniz.

ÇÖZÜM: $\displaystyle\int_1^\infty \frac{dx}{\sqrt{4x+\ln x}}$ integralinin karakterini inceleyelim.

$f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{4x+\ln x}}$ dersek; $\forall R \in [1,\infty)$ için f fonksiyonu, $[1,R]$ aralığında sürekli olup integrallenebilirdir. Ayrıca $\forall x \in [1,\infty)$ için $f(x)>0$ dır.

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x\left(4+\frac{\ln x}{x}\right)}} = \frac{1}{\sqrt{x}\sqrt{4+\frac{\ln x}{x}}}$$

$g(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ seçelim. $\forall R \in [1,\infty)$ için g fonksiyonu, $[1,R]$ aralığında sürekli olup integrallenebilirdir.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{\sqrt{x}\sqrt{4+\frac{\ln x}{x}}}}{\frac{1}{\sqrt{x}}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\sqrt{4+\frac{\ln x}{x}}} = \frac{1}{2} \in (0,\infty)$$

$$\boxed{\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x} \left(\frac{\infty}{\infty}\right) \underset{L.H}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = 0}$$

Böylece $\displaystyle\int_1^\infty f(x)\,dx$ ile $\displaystyle\int_1^\infty g(x)\,dx$ aynı karakterdedir.

$$\int_1^\infty g(x)\,dx = \lim_{R\to\infty} \int_1^R \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = \lim_{R\to\infty} 2\sqrt{x}\,\Big|_1^R = \lim_{R\to\infty} \left(2\sqrt{R}-2\right) = \infty$$

olduğundan $\displaystyle\int_1^\infty g(x)\,dx$ ıraksak olup bölüm testi gereği $\displaystyle\int_1^\infty f(x)\,dx$ integrali ıraksaktır.

1) $\int_0^{4\pi} \frac{\cos 2x}{\sqrt[3]{x-\pi}}\,dx$ integralinin mutlak yakınsak olduğunu gösteriniz

ÇÖZÜM: $\int_0^{4\pi} \left| \frac{\cos 2x}{\sqrt[3]{x-\pi}} \right|$ integralinin yakınsak olduğunu göstermeliyiz.

$f(x) = \frac{\cos 2x}{\sqrt[3]{x-\pi}}$ dersek; f fonksiyonu $\pi \in [0, 4\pi]$ noktasında tanımsızdır.

$$\int_0^{4\pi} \left| \frac{\cos 2x}{\sqrt[3]{x-\pi}} \right| dx = \underbrace{\int_0^{\pi} \left| \frac{\cos 2x}{\sqrt[3]{x-\pi}} \right| dx}_{I_1} + \underbrace{\int_{\pi}^{4\pi} \left| \frac{\cos 2x}{\sqrt[3]{x-\pi}} \right| dx}_{I_2}$$

I_1 için

$$\left| \frac{\cos 2x}{\sqrt[3]{x-\pi}} \right| = \frac{|\cos 2x|}{-\sqrt[3]{x-\pi}} \leq \frac{1}{-\sqrt[3]{x-\pi}}$$

$g(x) = -\frac{1}{\sqrt[3]{x-\pi}}$ dersek; $\forall b \in [0, \pi)$ için g fonksiyonu, $[0, b]$ aralığında sürekli olup integrallenebilirdir.

$$\int_0^{\pi} -\frac{1}{\sqrt[3]{x-\pi}}\,dx = -\lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_0^{\pi-\varepsilon} (x-\pi)^{-1/3}\,dx$$

$$= -\lim_{\varepsilon \to 0^+} \left. \frac{(x-\pi)^{2/3}}{\frac{2}{3}} \right|_0^{\pi-\varepsilon}$$

$$= -\frac{3}{2} \cdot \lim_{\varepsilon \to 0^+} \left[(-\varepsilon)^{2/3} - (-\pi)^{2/3} \right]$$

$$= \frac{3}{2} \cdot \pi^{2/3} \quad (\text{sonlu})$$

$\int_0^{\pi} -\frac{1}{\sqrt[3]{x-\pi}}\,dx$ yakınsak olduğundan karşılaştırma testi gereği

I_1 integrali yakınsaktır

I_2 için

$$\left| \frac{\cos 2x}{\sqrt[3]{x-\pi}} \right| = \frac{|\cos 2x|}{\sqrt[3]{x-\pi}} \leq \frac{1}{\sqrt[3]{x-\pi}}$$

$h(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x-\pi}}$ dersek $\forall a \in (\pi, 4\pi]$ için h fonksiyonu, $[a, 4\pi]$ aralığında sürekli olup integrallenebilirdir.

Devamı sonraki sayfada

$$\int_{\pi}^{4\pi} \frac{1}{\sqrt[3]{x-\pi}}\,dx = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{\pi+\varepsilon}^{4\pi} (x-\pi)^{-1/3}\,dx$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0^+} \left. \frac{(x-\pi)^{2/3}}{\frac{2}{3}} \right|_{\pi+\varepsilon}^{4\pi}$$

$$= \frac{3}{2} \lim_{\varepsilon \to 0^+} \left[(3\pi)^{2/3} - \varepsilon^{2/3} \right]$$

$$= \frac{3}{2} \cdot (3\pi)^{2/3} \quad (\text{sonlu})$$

$\int_{\pi}^{4\pi} \frac{1}{\sqrt[3]{x-\pi}}\,dx$ yakınsak olduğundan karsılastırma testi geregi I_2 integrali yakınsaktır.

Dolayısıyla $I_1 + I_2 = \int_0^{4\pi} \left| \frac{\cos 2x}{\sqrt[3]{x-\pi}} \right| dx$ integrali yakınsak olup $\int_0^{4\pi} \frac{\cos 2x}{\sqrt[3]{x-\pi}}\,dx$ integrali mutlak yakınsaktır.

2) $\int_0^\infty \frac{x}{x^2+16+\sqrt{x^2+16}}\,dx$ integralinin değerini hesaplayınız.

ÇÖZÜM: $\int_0^\infty \frac{x}{x^2+16+\sqrt{x^2+16}}\,dx = \int_0^\infty \frac{x}{\sqrt{x^2+16}\,(\sqrt{x^2+16}+1)}\,dx = \lim_{R\to\infty} \int_0^R \frac{x}{\sqrt{x^2+16}\,(\sqrt{x^2+16}+1)}\,dx$

$$\boxed{\begin{array}{l} \sqrt{x^2+16}+1=u \\ \frac{1}{\cancel{2}\sqrt{x^2+16}}\cdot\cancel{2}x\,dx=du \\ \frac{x}{\sqrt{x^2+16}}\,dx=du \end{array}}$$

$f(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2+16}\,(\sqrt{x^2+16}+1)}$ dersek; $\forall R\in[0,\infty)$ için f fonksiyonu $[0,R]$ de sürekli olup integrallenebilirdir.

$$\int_0^\infty \frac{x}{x^2+16+\sqrt{x^2+16}}\,dx = \lim_{R\to\infty}\int_0^R \frac{x}{\sqrt{x^2+16}\,(\sqrt{x^2+16}+1)}\,dx$$

$$= \lim_{R\to\infty}\int_5^{\sqrt{R^2+16}+1} \frac{du}{u}$$

$$= \lim_{R\to\infty} \ln u \Big|_5^{\sqrt{R^2+16}+1}$$

$$= \lim_{R\to\infty}\left[\ln\left(\sqrt{R^2+16}+1\right)-\ln 5\right]$$

$$= \infty$$

3) $\int_1^\infty \frac{dx}{\sqrt{(\ln x)+9x}}$ integralinin karakterini belirleyiniz.

ÇÖZÜM: $\int_1^\infty \frac{dx}{\sqrt{(\ln x)+9x}}$ integralinin karakterini inceleyelim.

$f(x) = \frac{1}{\sqrt{(\ln x)+9x}}$ dersek; $\forall R \in [1,\infty)$ için f fonksiyonu, $[1,R]$ aralığında sürekli olup integrallenebilirdir. Ayrıca $\forall x \in [1,\infty)$ için $f(x)>0$ dır.

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x\left(\frac{\ln x}{x}+9\right)}} = \frac{1}{\sqrt{x}\sqrt{\frac{\ln x}{x}+9}}$$

$g(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ seçelim. $\forall R \in [1,\infty)$ için g fonksiyonu, $[1,R]$ aralığında sürekli olup integrallenebilirdir.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{\sqrt{x}\sqrt{\frac{\ln x}{x}+9}}}{\frac{1}{\sqrt{x}}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\sqrt{\frac{\ln x}{x}+9}} = \frac{1}{3} \in (0,\infty)$$

$$\boxed{\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x}\left(\frac{\infty}{\infty}\right) \underset{L.H}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = 0}$$

Böylece $\int_1^\infty f(x)dx$ ile $\int_1^\infty g(x)dx$ aynı karakterdedir.

$$\int_1^\infty g(x)dx = \lim_{R\to\infty} \int_1^R \frac{1}{\sqrt{x}}dx = \lim_{R\to\infty} 2\sqrt{x}\Big|_1^R = \lim_{R\to\infty}\left(2\sqrt{R}-2\right) = \infty$$

olduğundan $\int_1^\infty g(x)dx$ ıraksak olup bölüm testi gereği $\int_1^\infty f(x)dx$ integrali ıraksaktır.

1) $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{x}+\sin(x^5)}$ integralinin karakterini belirleyiniz.

Çözüm: $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}+\sin(x^5)}$ dersek; $\forall a\in(0,1]$ için f, $[a,1]$ aralığında sürekli olup integrallenebilirdir.

Ayrıca her $x\in(0,1]$ için $f(x)>0$ dır.

$g(x)=\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}$ seçelim. $\forall a\in(0,1]$ için g, $[a,1]$ de sürekli olup integrallenebilirdir.

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}+\sin(x^5)}}{\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x}\left(1+\dfrac{\sin(x^5)}{\sqrt[3]{x}}\right)}$$

$$=\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{1+\dfrac{\sin(x^5)}{\sqrt[3]{x}}}=1\in(0,\infty)$$

$$\left(\lim_{x\to 0^+}\frac{\sin(x^5)}{\sqrt[3]{x}}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{\underset{L.H.}{=}}\lim_{x\to 0^+}\frac{(\cos(x^5)).5x^4}{\frac{1}{3}.x^{-2/3}}=\lim_{x\to 0^+}15.\cos(x^5).x^{14/3}=0\right)$$

$\displaystyle\int_0^1\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\,dx$ $\left(p=\frac{1}{3}<1\right)$ integrali p-testi gereği yakınsak olup verilen integral yakınsaktır.

2) $\int_2^{\infty} \frac{dx}{x-2+\sqrt{x-2}}$ integralinin değerini hesaplayınız.

ÇÖZÜM: $\int_2^{\infty} \frac{dx}{x-2+\sqrt{x-2}} = \int_2^{3} \frac{dx}{x-2+\sqrt{x-2}} + \int_3^{\infty} \frac{dx}{x-2+\sqrt{x-2}}$

$f(x) = \frac{1}{x-2+\sqrt{x-2}}$ dersek; $\forall a \in (2,3]$ ve $\forall R \in [3,\infty)$ için $[a,3]$ ve $[3,R]$ aralıklarında sürekli olup f fonksiyonu integrallenebilirdir.

$$\int_2^{3} \frac{dx}{x-2+\sqrt{x-2}} = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{2+\varepsilon}^{3} \frac{dx}{\sqrt{x-2}(\sqrt{x-2}+1)} = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{\sqrt{\varepsilon}+1}^{2} \frac{2\,du}{u}$$

$\sqrt{x-2}+1 = u$

$\frac{1}{2\sqrt{x-2}}\,dx = du$

$\frac{dx}{\sqrt{x-2}} = 2du$

$$= 2 \lim_{\varepsilon \to 0^+} \ln u \Big|_{\sqrt{\varepsilon}+1}^{2}$$

$$= 2 \lim_{\varepsilon \to 0^+} \left[\ln 2 - \ln(\sqrt{\varepsilon}+1)\right]$$

$$= 2\ln 2$$

$$\int_3^{\infty} \frac{dx}{x-2+\sqrt{x-2}} = \lim_{R \to \infty} \int_3^{R} \frac{dx}{\sqrt{x-2}(\sqrt{x-2}+1)} = \lim_{R \to \infty} \int_2^{\sqrt{R-2}+1} \frac{2\,du}{u}$$

$$= 2 \lim_{R \to \infty} \ln u \Big|_{2}^{\sqrt{R-2}+1}$$

$$= 2 \lim_{R \to \infty} \left[\ln(\sqrt{R-2}+1) - \ln 2\right]$$

$$= \infty$$

$$\int_2^{\infty} \frac{dx}{x-2+\sqrt{x-2}} = 2\ln 2 + \infty = \infty$$

3) $\int_{-10}^{0} \frac{dx}{(x+5)^3}$ integralinin karakterini belirleyiniz. Cauchy esas değerini bulunuz.

ÇÖZÜM: $f(x)=\frac{1}{(x+5)^3}$ dersek; f fonksiyonu $-5\in[-10,0]$ noktasında tanımsızdır.

$$\int_{-10}^{0}\frac{dx}{(x+5)^3}=\underbrace{\int_{-10}^{-5}\frac{dx}{(x+5)^3}}_{I_1}+\underbrace{\int_{-5}^{0}\frac{dx}{(x+5)^3}}_{I_2}$$

I_1 için, $\forall a\in[-10,-5)$ için f fonksiyonu, $[-10,a]$ aralığında sürekli olup integrallenebilirdir.

$$I_1=\int_{-10}^{-5}\frac{dx}{(x+5)^3}=\lim_{\varepsilon\to0^+}\int_{-10}^{-5-\varepsilon}(x+5)^{-3}dx=\lim_{\varepsilon\to0^+}\frac{(x+5)^{-2}}{-2}\Bigg|_{-10}^{-5-\varepsilon}$$

$$=\lim_{\varepsilon\to0^+}\left(\frac{(-\varepsilon)^{-2}}{-2}-\frac{(-5)^{-2}}{-2}\right)$$

$$=\lim_{\varepsilon\to0^+}-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\varepsilon^2}-\frac{1}{25}\right)$$

$$=-\infty$$

olduğundan I_1 integrali ıraksaktır. Böylece $\int_{-10}^{0}\frac{dx}{(x+5)^3}$ integrali ıraksak olur.

$$E.D.\int_{-10}^{0}\frac{dx}{(x+5)^3}=\lim_{\varepsilon\to0^+}\left(\int_{-10}^{-5-\varepsilon}\frac{1}{(x+5)^3}dx+\int_{-5+\varepsilon}^{0}\frac{dx}{(x+5)^3}\right)$$

$$=\lim_{\varepsilon\to0^+}\left[\left(-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{(x+5)^2}\right)\Bigg|_{-10}^{-5-\varepsilon}+\left(-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{(x+5)^2}\right)\Bigg|_{-5+\varepsilon}^{0}\right]$$

$$=\lim_{\varepsilon\to0^+}\left[\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(\frac{1}{\varepsilon^2}-\frac{1}{25}\right)+\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(\frac{1}{25}-\frac{1}{\varepsilon^2}\right)\right]$$

$$=\lim_{\varepsilon\to0^+}\cancel{-\frac{1}{2\varepsilon^2}}+\cancel{\frac{1}{50}}-\cancel{\frac{1}{50}}+\cancel{\frac{1}{2\varepsilon^2}}=0 \quad \text{(sonlu)}$$

1) $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}+\arctan x}$ integralinin karakterini belirleyiniz.

Çözüm: $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x}+\arctan x}$ dersek; $\forall a\in(0,1]$ için f fonksiyonu, $[a,1]$ aralığında sürekli olup integrallenebilirdir.

Ayrıca her $x\in(0,1]$ için $f(x)>0$ dır.

$g(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ seçelim. $\forall a\in(0,1]$ için g fonksiyonu $[a,1]$ aralığında sürekli olup integrallenebilirdir.

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{\sqrt{x}+\arctan x}}{\frac{1}{\sqrt{x}}}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}\left(1+\frac{\arctan x}{\sqrt{x}}\right)}$$

$$=\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{1+\frac{\arctan x}{\sqrt{x}}}=1\in(0,\infty)$$

$$\left(\lim_{x\to 0^+}\frac{\arctan x}{\sqrt{x}}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{\underset{LH}{=}}\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{1+x^2}}{\frac{1}{2\sqrt{x}}}=\lim_{x\to 0^+}\frac{2\sqrt{x}}{1+x^2}=0\right)$$

Böylece $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx$ ile $\displaystyle\int_0^1 g(x)\,dx$ aynı karakterdedir.

$\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$ $\left(p=\frac{1}{2}<1\right)$ integrali p-testi gereği yakınsak olup verilen integral yakınsaktır.

2) $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{dx}{x-1+\sqrt{x-1}}$ integralinin değerini hesaplayınız.

ÇÖZÜM: $$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x-1+\sqrt{x-1}} = \int_1^{2} \frac{dx}{x-1+\sqrt{x-1}} + \int_2^{\infty} \frac{dx}{x-1+\sqrt{x-1}}$$

$f(x) = \dfrac{1}{x-1+\sqrt{x-1}}$ dersek; $\forall a \in (1,2]$ ve $\forall R \in [2,\infty)$ için f fonksiyonu $[a,2]$ ve $[2,R]$ aralıklarında sürekli olup integrallenebilirdir.

$$\int_1^{2} \frac{dx}{x-1+\sqrt{x-1}} = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{1+\varepsilon}^{2} \frac{dx}{\sqrt{x-1}(\sqrt{x-1}+1)} = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{\sqrt{\varepsilon}+1}^{2} \frac{2\,du}{u}$$

$\sqrt{x-1}+1 = u$

$\dfrac{1}{2\sqrt{x-1}}\,dx = du$

$\dfrac{dx}{\sqrt{x-1}} = 2du$

$$= 2 \lim_{\varepsilon \to 0^+} \ln u \Big|_{\sqrt{\varepsilon}+1}^{2}$$

$$= 2 \lim_{\varepsilon \to 0^+} \left[\ln 2 - \ln(\sqrt{\varepsilon}+1)\right]$$

$$= 2\ln 2$$

$$\int_2^{\infty} \frac{dx}{x-1+\sqrt{x-1}} = \lim_{R \to \infty} \int_2^{R} \frac{dx}{\sqrt{x-1}(\sqrt{x-1}+1)} = \lim_{R \to \infty} \int_2^{\sqrt{R-1}+1} \frac{2\,du}{u}$$

$$= 2 \lim_{R \to \infty} \ln u \Big|_2^{\sqrt{R-1}+1}$$

$$= 2 \lim_{R \to \infty} \left[\ln(\sqrt{R-1}+1) - \ln 2\right]$$

$$= \infty$$

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x-1+\sqrt{x-1}} = 2\ln 2 + \infty = \infty$$

3) $\int_{-1}^{7} \frac{dx}{(x-1)^3}$ integralinin karakterini belirleyiniz.

Cauchy esas değerini bulunuz.

Çözüm: $\int_{-1}^{7} \frac{dx}{(x-1)^3} = \int_{-1}^{1} \frac{dx}{(x-1)^3} + \int_{1}^{7} \frac{dx}{(x-1)^3}$ IRAKSAK

$$\int_{-1}^{1} \frac{dx}{(x-1)^3} = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{-1}^{1-\varepsilon} \frac{dx}{(x-1)^3} = \lim_{\varepsilon \to 0^+} -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{(x-1)^2} \Big|_{-1}^{1-\varepsilon}$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0^+} -\frac{1}{2} \left(\frac{1}{\varepsilon^2} - \frac{1}{4} \right) = -\infty$$

$$\text{E.D.} \int_{-1}^{7} \frac{dx}{(x-1)^3} = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \left(\int_{-1}^{1-\varepsilon} \frac{dx}{(x-1)^3} + \int_{1+\varepsilon}^{7} \frac{dx}{(x-1)^3} \right)$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0^+} \left(-\frac{1}{2} \frac{1}{(x-1)^2} \Big|_{-1}^{1-\varepsilon} + \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \frac{1}{(x-1)^2} \Big|_{1+\varepsilon}^{7} \right)$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0^+} \left(-\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{\varepsilon^2} - \frac{1}{4} \right) - \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{36} - \frac{1}{\varepsilon^2} \right) \right)$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0^+} -\cancel{\frac{1}{2\varepsilon^2}} + \frac{1}{8} - \frac{1}{72} + \cancel{\frac{1}{2\varepsilon^2}} = \frac{1}{9}$$

(9)